JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series B 25, 74–93 (1978)

Über n-fach zusammenhängende Eckenmengen in Graphen

W. MADER

II. Mathematisches Institut der Freien Universität Berlin, 1 Berlin 33, Königin-Luise-Strasse 24/26, Germany

Communicated by the Editors

Received February 19, 1976

A vertex set A is n-connected in a graph G, if for every $\{a, b\} \subseteq A$ there are n openly disjoint paths joining a and b in G, and A is said to be n-minimal in G, if it is n-connected in G, but deleting any edge of G it loses this property. Let A be n-minimal in G. Then G contains at most $2^{n+3}n^{2n+2} \mid A \mid^2$ vertices of degree greater than 2. Furthermore, if $\mid A \mid > n$, then there are at least $n + 1$ vertices of degree n in A and the maximal degree of G does not exceed $\mid A \mid$. The case $\mid A \mid \leqslant n$ and similar problems for edge-connectivity are also considered.

Sei $G = (E(G), K(G))$ ein endlicher Graph und $A \subseteq E(G)$ mit $\mid A \mid \geqslant 2$. Für $x \in E(G)$ bezeichne $\gamma(x, G)$ den Grad von x in G und für $x \neq y$ aus $E(G)$ bedeute $\mu(x, y; G)$ die Maximalzahl kreuzungsfreier Wege zwischen x und y in G. Wir nennen A *n-zusammenhängend in G* (oder G *n-zusammenhängend bezüglich A*), wenn für alle $a \neq b$ aus A gilt $\mu(a, b; G) \geqslant n$. Weiterhin heiße A *n-minimal in G* (oder G *n-minimal bez. A*), wenn für jede Kante $[x, y] \in K(G)$ der Graph $G - [x, y] := (E(G), K(G) - \{[x, y]\})$ nicht mehr n-zusammenhängend bez. A ist und wenn für alle $x \in E(G) - A$ gilt $\gamma(x, G) > 0$. Wenn A in G n-minimal ist, dann auch in jeder Unterteilung von G. Bei vorgegebenen A und n gibt es also bez. A n-minimale Graphen mit beliebig hoher Eckenzahl. Ist aber vielleicht die Anzahl der Ecken vom Grad $\geqslant 3$ beschränkt? Oder etwas anders ausgedrückt: Gibt es zu vorgegebenen A und n bis auf Homöomorphie nur endlich viele bez. A n-minimale Graphen? Diese Frage wird in Satz 1 bejahend beantwortet.

In §2 beschäftigen wir uns mit dem Grad der Ecken in bez. A n-minimalen Graphen. Sei G ein bez. A n-minimaler Graph mit $\mid A \mid \geqslant 2$ und sei $e_n(A, G) := \mid\{a \in A \mid \gamma(a, G) = n\}\mid$. Für den Fall $\mid A \mid > n$ wird $e_n(A, G) \geqslant n + 1$ bewiesen. Dies verallgemeinert Ergebnisse aus [6] und [8]. Wenn $\mid A \mid \leqslant n$ ist, kann $e_n(A, G) = 0$ sein und die Abschätzung $\gamma(a, G) \leqslant (\mid A \mid - 1)(n - \mid A \mid + 2)$ ist für alle $a \in A$ bestmöglich. Im Fall $\mid A \mid > n$ gilt $\gamma(x, G) \leqslant \mid A \mid$ für alle $x \in E(G)$, während im Falle $\mid A \mid < n$ der für $x \in E(G) - A$ maximal mögliche Grad $\mid A \mid(\mid A \mid - 1)$ von Ecken $x \in E(G) - A$ erreicht werden kann.

0095-8956/78/0251–0074$02.00/0

Zunächst einige Bezeichnungen. Mit "Graph" meinen wir hier immer einen endlichen, ungerichteten Graphen ohne mehrfache Kanten und ohne Schlingen. Für $x \in E(G)$ sei $N(x, G) := \{ y \in E(G) \mid [x, y] \in K(G)\}$ und für einen Teilgraphen $H \subseteq G$ sei $N(H, G) := N(E(H), G) := \bigcup_{x \in E(H)} N(x, G) - E(H)$. Weiterhin seien $E_n(G) := \{x \in E(G) \mid \gamma(x, G) = n\}$, $E_{\geqslant n}(G) := \{x \in E(G) \mid \gamma(x, G) \geqslant n\}$ und $e_n(G) := |E_n(G)|$, $e_{\geqslant n}(G) := |E_{\geqslant n}(G)|$. Statt $x \in E(G)$ bzw. $[x, y] \in K(G)$ schreiben wir einfach $x \in G$ bzw. $[x, y] \in G$ und statt $A \subseteq E(G)$ manchmal $A \subseteq G$. Ferner sei $|G| := |E(G)|$. Für $T \subseteq E(G)$ und $S \subseteq K(G)$ seien $G - T := (E(G) - T, \{[x, y] \in G \mid \{x, y\} \cap T = \varnothing\})$, $G - S := (E(G), K(G) - S)$ und $G - S - T := (G - S) - T = (G - T) - S =: G - T - S$. Statt $G - \{a\}$ schreiben wir $G - a$ und analog in den anderen Fällen. Die Eckenmenge T heiße $A \subseteq E(G)$ *in* G *trennend*, wenn es Komponenten $C \neq C'$ von $G - T$ gibt mit $C \cap A \neq \varnothing$ und $C' \cap A \neq \varnothing$, wobei $C \cap A \neq \varnothing$ gleichbedeutend sei mit $E(C) \cap A \neq \varnothing$; im Falle $A = \{a, b\}$ sagen wir, T *trenne* a *und* b. Die Komponente G, welche $x \in G$ enthält, bezeichnen wir mit $C(x, G)$. Für eine Menge A sei $A^k := \{M \subseteq A \mid |M| = k\}$. Für $A \subseteq E(G)$ mit $|A| \geqslant 2$ sei $\mu(A, G) := \min_{\{a,b\} \in A^2} \mu(a, b; G)$ und $\mu(G) := \mu(E(G), G)$ für $|G| \geqslant 2$. Ein Weg zwischen $x \in E(G)$ und $y \in E(G)$ heiße ein x, y-*Weg*. Einen Weg W geben wir durch die sukzessive durchlaufenen Ecken $x_1, x_2, \ldots, x_m$ an, betrachten ihn aber als Teilgraphen und ohne Richtung. Für $x, y \in E(W)$ bezeichne $W[x, y]$ den Teilweg von W zwischen x und y. Zu den darüber hinaus benutzten Begriffen, etwa "*Weg*", "*kreuzungsfrei*", "*Unterteilung*" und "*unabhängige Eckenmenge*", vergleiche man [13] oder [7].

Viele Sätze über n-fach zusammenhängende Graphen lassen sich samt Beweis auf n-zusammenhängende Eckenmengen übertragen. Hierfür einige Beispiele, wobei die Übertragung der Beweise dem Leser überlassen bleibe.

(a) *Sei* $A \subseteq E(G)$ *mit* $|A| \geqslant n + 1$. *Es gilt* $\mu(A, G) \geqslant n$ *genau dann, wenn es keine* A *in* G *trennende Eckenmenge* T *mit* $|T| < n$ *gibt* (Whitney [15]).

(b) *Sei* $A \subseteq E(G)$ *mit* $\mu(A, G) \geqslant n$ *und seien* $A_1, A_2 \subseteq A$ *mit* $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. *Sei* $f\colon A_1 \cup A_2 \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *mit* $\sum_{a \in A_1} f(a) = \sum_{a \in A_2} f(a) = n$. *Dann existieren* n *Wege zwischen* A_1 *und* A_2 *in* G,[1] *die bis auf gemeinsame Endpunkte disjunkt sind, so daß jede Ecke* $a \in A_1 \cup A_2$ *auf genau* $f(a)$ *dieser Wege liegt* (Dirac [2]).

(c) *Sei* $A \subseteq E(G)$ *mit* $\mu(A, G) \geqslant n \geqslant 2$ *und* $A' \subseteq A$ *mit* $|A'| = n$. *Dann existiert ein Kreis* C *in* G *mit* $A' \subseteq C$ (Dirac [1]).

(d) *Sei* $A \subseteq E(G)$ *mit* $\mu(A, G) \geqslant n \geqslant 3$ *und sei* $A' \subseteq A$ *mit* $|A'| = n + 1$. *Dann gibt es einen Kreis* C *in* G *mit* $A' \subseteq C$ *oder es existiert ein* $T \subseteq E(G)$ *mit* $|T| = n$, *so daß* A' *sich "auf* $n + 1$ *verschiedene Komponenten von* $G - T$ *verteilt"* (Watkins und Mesner [14]).

[1] Das heißt, jeder Weg hat für $i = 1, 2$ genau eine Ecke mit A_i gemeinsam, und zwar eine Endecke.

(e) *Sei G ein plättbarer Graph und sei $A \subseteq E(G)$ mit $\mu(A, G) \geqslant 4$ und $|A| \geqslant 2$. Dann existiert ein Kreis C in G mit $A \subseteq C$* (Tutte [12]).

Zum Beweis von (e) kann man über $|G|$ induzieren und im Falle $\mu(G) = 3$ mit Hilfe von Satz 5.2.1 in [10] reduzieren, indem man eine trennende Eckenmenge auf dem dortigen Kreis wählt.

Zum Abschluß dieser einführenden Betrachtungen wollen wir eine Verschärfung von (c) beweisen. Dabei bedeute $[r]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich der reellen Zähl r.

(c′) *Seien $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ Ecken von G mit $\mu(x_i, x_j; G) \geqslant j + 1$ für alle i, j mit $n \geqslant i > j \geqslant [i/2] \geqslant 1$. Dann gibt es einen Kreis C in G mit $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq C$.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine unabhängige Eckenmenge von G bildet, da wir eventuell vorhandene Kanten $[x_i, x_j]$ unterteilen können, ohne Wesentliches zu ändern. Es gibt einen Kreis durch x_1 und x_2. Wir nehmen an, daß für ein k mit $2 \leqslant k < n$ ein Kreis C mit $X := \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq C$ in G existiert, und zeigen die Existenz eines Kreises durch $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$. Wir können $x_{k+1} \notin C$ voraussetzen. Wir haben $\mu(x_{k+1}, x_\kappa; G) \geqslant \kappa + 1$ für alle κ mit $k \geqslant \kappa \geqslant [(k+1)/2]$.

Sei zunächst $k + 1$ gerade, etwa $k + 1 = 2m$. Überlegen wir uns, daß es zu jedem κ mit $m \leqslant \kappa \leqslant 2m - 1 = k$ zwei kreuzungsfreie x_κ, x_{k+1}-Wege W_κ und $W_{\kappa+m}$ gibt, so daß für alle $\kappa \neq \lambda$ gilt $E(W_\kappa \cup W_{\kappa+m}) \cap E(W_\lambda \cup W_{\lambda+m}) = \{x_{k+1}\}$. Mit $a \notin G$ sei $G_0 := (E(G) \cup \{a\}, K(G) \cup \{[a, x_\kappa] \mid \kappa = m, \ldots, 2m-1\})$. Wir definieren nun rekursiv für $i = 0, 1, \ldots, m - 1$ einen Graphen $G_{i+1} := (E(G_i) \cup \{y_{m+i}\}, K(G_i) \cup \{[y_{m+i}, y] \mid y \in N(x_{m+i}, G_0)\})$ mit $y_{m+i} \notin G_i$. Für die Existenz obiger Wege genügt es, $\mu(a, x_{k+1}; G_m) \geqslant 2m$ nachzuweisen. Führen wir die Annahme $\mu(a, x_{k+1}; G_m) < 2m$ zum Widerspruch. Es existiert dann eine a und x_{k+1} trennende Eckenmenge T_m in G_m mit $|T_m| \leqslant 2m - 1$. Da nach Voraussetzung $\mu(x_{k+1}, x_{2m-1}; G_m - a) = \mu(x_{k+1}, y_{2m-1}; G_m - a) \geqslant 2m$ ist, folgt $\{x_{2m-1}, y_{2m-1}\} \subseteq T_m$. Sei $T_{m-1} := T_m - \{y_{2m-1}\}$. Dann ist T_{m-1} eine a und x_{k+1} in G_{m-1} trennende Eckenmenge mit $|T_{m-1}| \leqslant 2m - 2$ und wie oben ergibt sich $\{x_{2m-2}, y_{2m-2}\} \subseteq T_{m-1}$. Auf diese Weise kommen wir schließlich zu einer a und x_{k+1} in G_1 trennenden Eckenmenge T_1 mit $|T_1| \leqslant m$ und $\{x_{m+1}, \ldots, x_{2m-1}\} \subseteq T_1$ und wegen $\mu(x_{k+1}, x_m; G_1 - a) = \mu(x_{k+1}, y_m; G_1 - a) \geqslant m + 1$ ist auch $\{x_m, y_m\} \subseteq T_1$, im Widerspruch zu $|\{y_m, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m-1}\}| > m$.—Für $\kappa \in \{m, \ldots, 3m-1\}$ sei z_κ die auf W_κ am nächsten bei x_{k+1} gelegene Ecke aus $C \cap W_\kappa \neq \varnothing$ und sei $W_\kappa' := W_\kappa[x_{k+1}, z_\kappa]$. Durch X wird C "in k (abgeschlossene) Kreisbögen $B_1, \ldots, B_k$ zerlegt." Wenn ein B_i existiert, das zwei verschiedene Ecken z_κ, etwa $z_{\kappa_1} \neq z_{\kappa_2}$, enthält, können wir $B_i[z_{\kappa_1}, z_{\kappa_2}]$ durch $W_{\kappa_1}' \cup W_{\kappa_2}'$ ersetzen und erhalten einen Kreis durch $X \cup \{x_{k+1}\}$. Führen wir die Annahme, daß kein solches B_i existiert, zum Widerspruch. Sei C in einer der beiden Umlaufrichtungen orientiert. Diese Orientierung übernehmen wir für die B_i, so daß also jeder der Wege B_i einen Anfangspunkt und einen Endpunkt hat. Sei $\kappa \in \{m,..., 3m - 1\}$. Wenn $z_\kappa \notin X$ ist, ordnen wir κ das B_i mit $z_\kappa \in B_i$ zu. Sei nun $z_\kappa \in X$. Wenn $\kappa \in \{m,..., 2m - 1\}$ ist, ordnen wir κ das B_i zu, dessen Anfangspunkt z_κ ist. Wenn $2m \leqslant \kappa \leqslant 3m - 1$ ist, ordnen wir κ das B_i zu, dessen Endpunkt z_κ ist. Diese (eindeutig definierte) Zuordnung ist bei obiger Annahme injektiv, im Widerspruch zu $2m > k$.

Der Beweis für den Fall $k + 1$ ungerade, etwa $k = 2m$, verläuft analog. Man hat sich dazu lediglich zu überlegen, daß zu jedem $\kappa \in \{m + 1,..., 2m\}$ zwei kreuzungsfreie x_κ, x_{k+1}-Wege W_κ und $W_{\kappa+m}$ existieren und es weiterhin einen x_m, x_{k+1}-Weg W_m gibt, so daß W_m, W_{m+1},..., W_{3m} bis auf gemeinsame Endpunkte paarweise elementfremd sind. Die Existenz solcher Wege ergibt sich aber wie oben, wobei jetzt die Ecken x_{m+1},..., x_{2m} "aufzuspalten" sind.

1. Über die Endlichkeit der Anzahl der "Zusammenhangstypen"

Seien eine endlich Menge A mit $|A| \geqslant 2$ und eine natürliche Zahl n vorgegeben. Wir wollen in diesem Paragraphen die Frage untersuchen, ob die Anzahl der Ecken vom Grad $\geqslant 3$, die ein bez. A n-minimaler Graph enthalten kann, nach oben beschränkt ist. In Satz 1 wird bewiesen, daß es bis auf Homöomorphie (d.h. bis auf Ecken vom Grad 2) tatsächlich nur endlich viele bez. A n-minimale Graphen gibt. Um die Endlichkeit der Anzahl dieser "Zusammenhangstypen" zeigen zu können, verallgemeinern wir zunächst das Problem. Sei N die Menge aller nicht negativen, ganzen Zahlen. Sei $f: A \times A \to N$ eine Funktion mit $f(x, y) = f(y, x)$ für alle x, y aus A und $f(x, x) = 0$ für alle $x \in A$. Sei G ein Graph und $A \subseteq E(G)$. Dann heiße A *f-zusammenhängend in* G (oder G *f-zusammenhängend bezüglich* A), wenn für alle $x \neq y$ aus A gilt $\mu(x, y; G) \geqslant f(x, y)$. Weiterhin heiße A *minimal f-zusammenhängend* (abkürzend: *f-minimal*) *in* G (oder G *f-minimal bezüglich* A), wenn A in G f-zusammenhängt, aber der Graph $G - [x, y]$ für alle $[x, y] \in K(G)$ bez. A nicht mehr f-zusammenhängend ist und wenn für alle $x \in G - A$ gilt $\gamma(x, G) > 0$. Wenn $f(x, y) = n$ für alle $\{x, y\} \in A^2$ ist, erhalten wir die Begriffe "n-zusammenhängend" und "n-minimal." Von A setzen wir stets $|A| \geqslant 2$ voraus. Eine Funktion $f: A \times A \to N$, die wir bei den Begriffen "f-zusammenhängend" oder "f-minimal" benutzen, betrachten wir als definiert, wenn $f(x, y)$ oder $f(y, x)$ für jedes $\{x, y\} \in A^2$ definiert wurde. Wenn wir in obiger Definition auch unendliche Graphen zugelassen hätten, wäre offensichtlich trotzdem jeder bez. eines endlichen A f-minimale Graph endlich. Wenn G ein bez. A f-minimaler Graph ist, dann ist auch jede Unterteilung von G bez. A f-minimal. Da die Ecken $x \in G - A$ mit $\gamma(x, G) = 2$ bei allen unseren Fragestellungen irrelevant sind, können wir statt G auch immer irgendeine Unterteilung von G betrachten. Zur Vermeidung von

Fallunterscheidungen setzen wir daher A stets als unabhängige Eckenmenge von G voraus.

Seien nun die endliche Menge A mit $|A| \geqslant 2$ und die symmetrische, auf der Diagonale verschwindende Funktion $f: A \times A \to N$ fest gewählt. Sei $g_f := \sup_{G \in \mathfrak{G}_f} e_{\geqslant 3}(G)$, wobei $\mathfrak{G}_f$ die Klasse aller Graphen G mit $A \subseteq E(G)$ bezeichne, die bez. A f-minimal sind. Wenn $f(x, y) = n$ für alle $\{x, y\} \in A^2$ ist, schreiben wir $g_n(|A|)$ statt g_f. Das Ziel dieses Paragraphen ist es, nachzuweisen, daß g_f endlich ist für jedes f. Betrachten wir ein paar Beispiele.

(B_1) *Es existiert $\{a, b\} \in A^2$, so daß für alle $\{x, y\} \in A^2$ mit $\{x, y\} \neq \{a, b\}$ gilt $f(x, y) = 0$.*

Dann besteht ein bez. A f-minimaler Graph aus $f(a, b)$ kreuzungsfreien a, b-Wegen und aus isolierten Ecken $x \in A$. Also ist $g_f = 0 = g_n(2)$ für $n := f(a, b) \leqslant 2$ und $g_f = 2 = g_n(2)$ für $n := f(a, b) \geqslant 3$.

(B_2) *Sei G bez. A 1-minimal.*

Dann ist G ein Baum mit $E_1(G) \subseteq A$. Da für einen Baum B mit $|B| \geqslant 2$ gilt $e_1(B) = 2 + \sum_{x \in E_{\geqslant 3}(B)} (\gamma(x, B) - 2)$, folgt somit $e_{\geqslant 3}(G) \leqslant |A| - 2$, also $g_1(|A|) \leqslant |A| - 2$. Da andererseits jeder Baum B' mit $|B'| \geqslant 2$ bez. $E_1(B')$ 1-minimal ist, zeigt ein Baum B mit $E(B) = E_1(B) \cup E_3(B)$ wegen $e_1(B) = 2 + e_{\geqslant 3}(B)$, daß $g_1(|A|) \geqslant |A| - 2$, also $g_1(|A|) = |A| - 2$ gilt.

(B_3) *Sei $f(x, y) \leqslant 1$ für alle $\{x, y\} \in A^2$.*

Sei $A' := \{a \in A \mid \bigvee_{x \in A} f(a, x) > 0\}$. Wenn $A' = \varnothing$ ist, gilt $g_f = 0$. Nehmen wir $A' \neq \varnothing$, also $m := |A'| \geqslant 2$ an. Sei G bez. A f-minimal und sei C eine Komponente von G mit $|C| \geqslant 2$. Dann ist C 1-minimal bez. $A' \cap E(C)$, also $e_{\geqslant 3}(C) \leqslant |A' \cap E(C)| - 2$ nach (B_2). Da mindestens eine Komponente C mit $|C| \geqslant 2$ existiert, erhält man $g_f \leqslant |A'| - 2$ durch Summation über die Komponenten von G.—Seien $a_1 \neq a_m$ aus A' mit $f(a_1, a_m) = 1$ und sei $A' - \{a_1, a_m\} = \{a_2, \ldots, a_{m-1}\}$. Weiterhin sei $x_1, \ldots, x_m$ ein Weg W mit $W \cap A = \varnothing$ und es sei $H := (E(W) \cup A, K(W) \cup \{[x_i, a_i] \mid i = 1, \ldots, m\})$. Der Graph H ist f-minimal bez. A und zeigt $g_f \geqslant |A'| - 2$. Also gilt $g_f = |A'| - 2$.

(B_4) *Sei G 2-minimal bez. A.*

Für $|A| = 2$ ist $g_2(|A|) = 0$ nach (B_1). Sei also $|A| \geqslant 3$. Wir nennen einen Weg $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ mit $n \geqslant 1$ "überflüssig," wenn $x_i \notin A$ und $\gamma(x_i, G) = 2$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt, aber $x_i \in A$ oder $\gamma(x_i, G) \geqslant 3$ für $i = 0$ und $i = n + 1$ gilt. Zwei überflüssige Wege sind gleich (als Teilgraphen) oder bis auf gemeinsame Endpunkte disjunkt. Der Multigraph[2] G' entstehe aus G, indem wir jeden überflüssigen Weg $x_0, \ldots, x_{n+1}$ von G durch eine Kante zwischen x_0 und x_{n+1} ersetzen. Für alle $x \in E(G')$ gilt $\gamma(x, G') = \gamma(x, G)$ und aus $\gamma(x, G') = 2$ folgt $x \in A$, da andernfalls x "Innenecke" eines überflüssigen Weges von G wäre, also nicht zu G' gehören könnte. Ferner ist A auch 2-zusammenhängend[3] in G', ja sogar 2-minimal in G'. Da offensichtlich keine trennende Eckenmenge T von G' mit $|T| \leqslant 1$ existiert, ist G' wegen $|A| \geqslant 3$ ein minimal 2-fach zusammenhängender *Graph* (vgl. Theorem 2 in [3]). Also gilt $e_2(G') \geqslant \frac{1}{3}|G'| + \frac{4}{3}$, wie sich aus [3] oder [11] entnehmen läßt und in Satz 3 von [9] mitbewiesen wurde. Wegen $E_2(G') \subseteq A$ erhalten wir hieraus $e_{\geqslant 3}(G) = e_{\geqslant 3}(G') = |G'| - e_2(G') \leqslant 2(e_2(G') - 2) \leqslant 2(|A| - 2)$.—Sei $A := \{a_1, \ldots, a_m\}$. Der Graph H entstehe aus einer "Leiter mit m Sprossen" durch Unterteilung der i-ten Sprosse durch die Ecke a_i für $i = 1, \ldots, m$. Der Graph H ist 2-minimal bez. A und zeigt somit $g_2(|A|) \geqslant 2(|A| - 2)$. Also gilt $g_2(|A|) = 2(|A| - 2)$ für alle $|A| \geqslant 2$.

(B_5) *Sei* $\max_{x \in A} f(a, x) = 2$ *für alle* $a \in A$.

Sei G f-minimal bez. A und sei B ein Block von G mit $|B| \geqslant 3$. Dann ist B 2-minimal bez. $A \cap E(B)$ und nach (B_4) somit $e_{\geqslant 3}(B) \leqslant 2(|A \cap B| - 2)$. Die Komponente C von G enthalte genau $k + 1$ Blöcke B mit $|B| \geqslant 3$, etwa die Blöcke $B_1, \ldots, B_{k+1}$. Sei $X := \{x \in C \mid \gamma(x, C) \geqslant 3 \wedge \bigwedge_{B_i \ni x} \gamma(x, B_i) = 2\}$. Die Ecken $x \in X$ "bekommen" also den Grad $\geqslant 3$ durch die "Verbindungswege zwischen den Blöcken B_i". Man überlegt sich leicht $|X| \leqslant 2k$. Wegen $\sum_{i=1}^{k+1} |A \cap B_i| \leqslant |A \cap C| + k$ gilt also $e_{\geqslant 3}(C) \leqslant 2(|A \cap C| + k - 2(k + 1)) + 2k = 2(|A \cap C| - 2)$ und somit auch $e_{\geqslant 3}(G) \leqslant 2(|A| - 2)$.—Wenn wir beim Graphen H aus (B_4) die Ecken a_1 und a_m mit $f(a_1, a_m) = 2$ wählen, ist er f-minimal bez. A und zeigt $g_f \geqslant 2(|A| - 2)$. Also gilt $g_f = 2(|A| - 2)$.

Bevor wir zum Beweis der Endlichkeit von g_f kommen, noch zwei Lemmata. Seien $a \neq b$ nicht benachbarte Ecken in einem endlichen Graphen G und sei $\mathfrak{T}_G(a, b) := \{T \subseteq E(G) \mid T$ trennt a und b und $|T| = \mu(a, b; G)\}$. Ferner definieren wir eine Relation $\leqslant_a$ in $\mathfrak{T}_G(a, b)$: Für $T, T' \in \mathfrak{T}_G(a, b)$ sei $T \leqslant_a T'$ genau dann, wenn für jeden Weg W mit $a \in W$ und $W \cap T' \neq \varnothing$ auch $W \cap T \neq \varnothing$ gilt. Dann ist $\leqslant_a$ eine Ordnungsrelation in $\mathfrak{T}_G(a, b)$ und $(\mathfrak{T}_G(a, b), \leqslant_a)$ bildet einen Verband. Den Beweis dieser und der folgenden Behauptung findet man in [4]. Seien n kreuzungsfreie a, b-Wege $W_1, \ldots, W_n$ in G gegeben, wobei $n := \mu(a, b; G)$ sei. Weiterhin seien $T_1, \ldots, T_k$ aus $\mathfrak{T}_G(a, b)$ und für $i = 1, \ldots, n$ sei a_i die erste und b_i die letzte Ecke aus $\bigcup_{\kappa=1}^{k} T_\kappa$

[2] Bei einem "Multigraphen" seien mehrfache Kanten, aber keine Schlingen zugelassen. Die Begriffe "n-zusammenhängend bez. A" usw. seien für Multigraphen analog definiert.

[3] Hierbei sehen wir von unserer Voraussetzung "A unabhängig" ab.

auf dem Weg W_i in Richtung von a nach b. Dann sind $\inf_{\kappa=1,\ldots,k} T_\kappa = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\sup_{\kappa=1,\ldots,k} T_\kappa = \{b_1, \ldots, b_n\}$ im Verband $(\mathfrak{T}_G(a, b), \leqslant_a)$.

LEMMA 1. *Seien $a \neq b$ nicht benachbarte Ecken in G und seien $W_0, \ldots, W_n$ kreuzungsfreie a, b-Wege in G mit $n := \mu(a, b; G) - 1$. Für $i = 0, \ldots, r$ sei $[x_i, y_i] \in K(W_0)$ mit $\mu(a, b; G - [x_i, y_i]) \leqslant n$, wobei die x_i, y_j in der Reihenfolge $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r$ auf W_0 von a nach b liegen. Für $i = 0, \ldots, r$ existiert dann eine a und b in $G - [x_i, y_i]$ trennende Eckenmenge T_i mit $|T_i| = n$, so daß für jedes $j = 1, \ldots, n$ die Ecken $t_i^j \in T_i \cap W_j$ in der Reihenfolge $t_0^j, t_1^j, \ldots, t_r^j$ auf W_j von a nach b liegen.*[4]

Beweis. Der Graph G' entstehe aus G, indem wir für $i = 0, \ldots, r$ die Kante $[x_i, y_i]$ durch eine Ecke z_i unterteilen. Dabei entstehe aus W_0 der Weg W'_0. Es ist auch $\mu(a, b; G') = n + 1$ und für $i = 0, \ldots, r$ gilt $\mu(a, b; G' - z_i) \leqslant n$. Wegen $[a, b] \notin K(G')$ existiert also für $i = 0, \ldots, r$ eine a und b in G' trennende Eckenmenge T'_i mit $|T'_i| = n + 1$ und $z_i \in T'_i$. Im Verband $(\mathfrak{T}_{G'}(a, b), \leqslant_a)$ bilden wir $T^*_i := \sup_{0 \leqslant j \leqslant i} T'_j$ für $i = 0, \ldots, r$. Dann gilt $T^*_0 \leqslant_a T^*_1 \leqslant_a \cdots \leqslant_a T^*_r$. Da z_i von den Ecken $z_0, \ldots, z_i$ auf W'_0 am nächsten bei b liegt, gilt $z_i \in T^*_i$ für alle i. Dann haben aber die Eckenmengen $T_i := T^*_i - \{z_i\}$ für $i = 0, \ldots, r$ die gewünschte Eigenschaft in G.

LEMMA 2. *Seien $[a, x_1], [a, x_2], \ldots, [a, x_k]$ verschiedene Kanten von G mit $\mu(a, b; G - [a, x_i]) < \mu(a, b; G)$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann gilt $\mu(a, b; G - \{[a, x_i] \mid i = 1, \ldots, k\}) = \mu(a, b; G) - k$.*

Beweis. Wir können $[a, b] \notin K(G)$ annehmen. G' entstehe aus G, indem wir für jedes $i = 1, \ldots, k$ die Kante $[a, x_i]$ durch eine Ecke z_i unterteilen. Dann ist auch $\mu(a, b; G' - z_i) < \mu(a, b; G') = \mu(a, b; G) =: n$. Also existiert eine a und b in G' trennende Eckenmenge T_i mit $|T_i| = n$ und $z_i \in T_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Sei $T_0 := \inf_{i=1,\ldots,k} T_i$ im Verband $(\mathfrak{T}_{G'}(a, b), \leqslant_a)$. Da für jeden a, b-Weg W mit $z_i \in W$ gilt $|W[a, z_i]| = 2$, ist $\{z_1, \ldots, z_k\} \subseteq T_0$. Also ist $T := T_0 - \{z_1, \ldots, z_k\}$ eine a und b in $G - \{[a, x_i] \mid i = 1, \ldots, k\} = G' - \{z_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ trennende Eckenmenge mit $|T| = n - k$, woraus sich die Behauptung ergibt.

SATZ 1. *Seien eine endliche Menge A mit $|A| \geqslant 2$ und eine symmetrische, auf der Diagonale verschwindende Funktion $f: A \times A \to N$ gegeben. Dann existiert eine (kleinste) ganze Zahl $g_f \in N$, so daß für jeden bez. A f-minimalen Graphen G gilt $e_{\geqslant 3}(G) \leqslant g_f$.*

Beweis. Sei G f-minimal bez. A. Nach Beispiel (B_3) können wir annehmen, daß $a \neq b$ in A mit $n + 1 := f(a, b) \geqslant 2$ existieren. Weiterhin nach (B_1),

[4] Hierbei seien zugelassen $y_i = x_{i+1}$ und ebenso $t_i^j = t_{i+1}^j$. Man beachte auch $|T_i \cap W_j| = 1$.

daß $\sum_{\{x,y\}\in A^2} f(x,y) > f(a,b)$ ist. Sei $f'(a,b) := f(a,b) - 1 =: f'(b,a)$ und sonst $f'(x,y) = f(x,y)$. Wir nehmen induktiv an, daß die Endlichkeit von $g_{f'}$ schon bewiesen ist. Es genügt nun, die folgende Ungleichung zu zeigen:

(U) $e_{\geqslant 3}(G) \leqslant g_{f'} + 5(n+1)\, 2^{n+2} n^n \sum_{\{a,b\}\neq\{x,y\}\in A^2} (f(x,y))^n$.

Sei S_0 maximal (bez. $\subseteq$) unter allen $S' \subseteq K(G)$, für welche $G - S'$ noch f'-zusammenhängend bez. A ist. Ferner sei $S := \{[x,y] \in S_0 \mid \gamma(x,G) \geqslant 3 \vee \gamma(y,G) \geqslant 3\}$. Dann ist $G - S_0$ nach Weglassen isolierter Ecken f'-minimal bez. A wegen der Maximaleigenschaft von S_0. Also gilt nach Induktionsannahme $e_{\geqslant 3}(G - S_0) \leqslant g_{f'}$. Wegen $E_{\geqslant 3}(G) - E_{\geqslant 3}(G - S_0) \subseteq \bigcup_{[x,y]\in S} \{x,y\}$ gilt $e_{\geqslant 3}(G) \leqslant g_{f'} + 2 \mid S \mid$. Wir führen die Annahme $e_{\geqslant 3}(G) > g_{f'} + 5(n+1)\, 2^{n+2} n^n \sigma$ zum Widerspruch, wobei $\sigma := \sum_{\{a,b\}\neq\{x,y\}\in A^2} (f(x,y))^n$ sei. Aus dieser Annahme folgt $\mid S \mid > 5(n+1)\, 2^{n+1} n^n \sigma$. Es gibt $n+1$ kreuzungsfreie a,b-Wege $W_0, \ldots, W_n$ in G. Da A einerseits f'-zusammenhängend in $G - S_0$, andererseits aber f-minimal in G ist, gilt $\mu(a,b; G - [x,y]) \leqslant n$ für jedes $[x,y] \in S_0$. Also ist $S \subseteq S_0 \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} K(W_i)$. Somit existiert ein $\alpha \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit $\mid S \cap K(W_\alpha) \mid > 2^{n+1} 5 n^n \sigma$; sei etwa $\alpha = 0$. Die Kanten von $S \cap K(W_0)$ längs W_0 von a nach b seien $k_0, k_1, k_2, \ldots$ und sei $\bar{S} := \{k_i \mid i \text{ gerade}\}$. Sei $s := \mid \bar{S} \mid - 1$ und sei etwa $k_{2i} = [x_i, y_i]$ für $i = 0, 1, \ldots, s$, wobei x_i auf W_0 näher bei a liege als y_i. Da k_{2i-1} mit einer Ecke vom Grad $\geqslant 3$ inzidiert, existiert für alle $i = 1, \ldots, s$ ein $u_i \in W_0[y_{i-1}, x_i]$ mit $\gamma(u_i, G) \geqslant 3$. Es gibt also eine Kante $[u_i, v_i] \in K(G) - K(W_0)$ für $i = 1, \ldots, s$. Da A f-minimal in G ist, existieren $a_i \neq b_i$ in A mit $\mu(a_i, b_i; G - [u_i, v_i]) < f(a_i, b_i)$. Insbesondere ist $f(a_i, b_i) > 0$ und wegen $[u_i, v_i] \notin \bigcup_{j=0}^{n} K(W_j)$ gilt $\{a_i, b_i\} \neq \{a, b\}$ für alle $i = 1, \ldots, s$. Wegen $s + 1 \geqslant \frac{1}{2} \mid S \cap K(W_0) \mid > 2^n 5 n^n \sigma > 0$ existiert $\{a', b'\} \in A^2$ mit $\{a', b'\} \neq \{a, b\}$ und $m := f(a', b') > 0$, das mindestens $2^n 5 n^n m^n$ mal in der Folge $\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_s, b_s\}$ vorkommt. Sei etwa $\{a', b'\} = \{a_{j_1}, b_{j_1}\} = \cdots = \{a_{j_r}, b_{j_r}\}$ für $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant s$ mit $r \geqslant 2^n 5 n^n m^n > 0$. Sei $\bar{x}_0 := x_0$, $\bar{y}_0 := y_0$ und für $i = 1, \ldots, r$ sei $\bar{x}_i := x_{j_i}$, $\bar{y}_i := y_{j_i}$, $\bar{u}_i := u_{j_i}$ und $\bar{v}_i := v_{j_i}$. Betrachten wir die Kanten $[\bar{x}_0, \bar{y}_0], \ldots, [\bar{x}_r, \bar{y}_r]$. Nach Lemma 1 gibt es für $i = 0, \ldots, r$ eine a und b in $G - [\bar{x}_i, \bar{y}_i]$ trennende Eckenmenge T_i mit $\mid T_i \mid = n$, so daß $T_i \leqslant_a T_{i'}$ für $0 \leqslant i \leqslant i' \leqslant r$ gilt, wobei $\leqslant_a$ die Ordnungsrelation des Verbandes $(\mathfrak{T}_{G'}(a,b), \leqslant_a)$ mit $G' := G - E(W_0 - \{a,b\})$ bezeichne. Für $i = 1, \ldots, r$ sei $C_i := C(\bar{u}_i, G - \{[\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}], [\bar{x}_i, \bar{y}_i]\} - (T_{i-1} \cup T_i))$ und für $i = 0, 1, \ldots, r$ sei $R_i := T_i \cup \bigcup E(C)$, wobei die Vereinigung über alle Komponenten C von $G - T_i$ mit $C \neq C(a, G - T_i)$ zu bilden ist (falls vorhanden). Für $i \neq j$ gilt $C_i \cap C_j = \varnothing$ und es ist $(\bigcup_{i=1}^{r} C_i) \cap \bigcup_{i=0}^{r} R_i = \varnothing$. Wenn $t \in T_i \cap T_j$ für $i < j$ ist, dann gilt wegen $T_i \leqslant_a T_{i+1} \leqslant_a \cdots \leqslant_a T_j$ auch $t \in T_k$ für alle k mit $i \leqslant k \leqslant j$. Wenn $x \in R_i - T_i$ ist, dann gilt $x \notin \bigcup_{j=0}^{r} T_j$ wegen $x \notin \bigcup_{j=0}^{n} E(W_j)$. Wenn $x \in (R_i - T_i) \cap (R_j - T_j)$ für $i < j$ ist, dann gilt $C(x, G - T_k) = C(x, G - T_i) =: \bar{C}$ für alle k mit $i \leqslant k \leqslant j$. Denn es ist

$T := N(\bar{C}, G) \subseteq T_i$ und im Falle $T \nsubseteq T_{i+1}$ wäre $\bar{C} \subseteq C(a, G - [\bar{x}_{i+1}, \bar{y}_{i+1}] - T_{i+1}) \subseteq C(a, G - [\bar{x}_j, \bar{y}_j] - T_j)$.

Wir definieren nun eine Partition $\Pi(a')$ von $\{0, 1,..., r\}$: Wenn $a' \in C_i$ ist, bestehe $\Pi(a')$ aus den beiden Klassen $\{0, 1,..., i-1\}$ und $\{i,..., r\}$. Wenn $a' \in \bigcup_{i=0}^{r} R_i$ ist, seien $\underline{i} := \min\{i \mid 0 \leqslant i \leqslant r \wedge a' \in R_i\}$ und $\bar{\imath} := \max\{i \mid 0 \leqslant i \leqslant r \wedge a' \in R_i\}$ und $\Pi(a')$ bestehe aus den Klassen $\{0,..., \underline{i}-1\}$, $\{\underline{i},..., \bar{\imath}\}$ und $\{\bar{\imath}+1,..., r\}$, soweit nicht leer. Wenn $a' \notin \bigcup_{i=1}^{r} C_i \cup \bigcup_{i=0}^{r} R_i$ ist, habe $\Pi(a')$ nur die Klasse $\{0,..., r\}$. Analog sei $\Pi(b')$ definiert. Der verbandstheoretische Durchschnitt $\Pi := \Pi(a') \cap \Pi(b')$ hat höchstens 5 Klassen $\pi_1,..., \pi_c$. Also gibt es ein $\zeta \in \{1,..., c\}$ mit $|\pi_\zeta| > 2^n n^n m^n$. Da jede Klasse von Π ein "ganzzahliges Intervall" ist, sei etwa $\pi_\zeta = \{r', r'+1,..., r'+\lambda_0\}$ mit $\lambda_0 \geqslant 2^n n^n m^n$. Seien $T'_\lambda := T_{r'+\lambda}$, $x'_\lambda := \bar{x}_{r'+\lambda}$ und $y'_\lambda := \bar{y}_{r'+\lambda}$ für $\lambda = 0,..., \lambda_0$. Auf jedem der Wege $W_1,..., W_n$ liegt genau eine Ecke von T'_λ; sei etwa $T'_\lambda \cap E(W_i) = \{t_\lambda{}^i\}$ für $i = 1,..., n$. Da A f'-zusammenhängend in $G - S_0$ ist, existieren m kreuzungsfreie a', b'-Wege $w_1,..., w_m$ in $G - S_0$. Auf w_μ in Richtung von a' nach b' seien $z^1_{\lambda,\mu},..., z^{m(\lambda,\mu)}_{\lambda,\mu}$ die Ecken aus $T'_\lambda \cap (w_\mu - a')$ mit $m(\lambda, \mu) := |T'_\lambda \cap (w_\mu - a')|$. Wir ordnen nun jedem $t_\lambda{}^i \in T'_\lambda$ ein Tripel $F_\lambda{}^i = (f_\lambda{}^i, g_\lambda{}^i, h_\lambda{}^i)$ zu. Wenn $t_\lambda{}^i \notin \bigcup_{j=1}^{m} E(w_j - b')$ ist, sei $F_\lambda{}^i := (0, 0, -1)$. Sei nun $t_\lambda{}^i \in \bigcup_{j=1}^{m} E(w_j - b')$. (1) Im Falle $t_\lambda{}^i = a'$ sei $f_\lambda{}^i := a'$. Wenn $t_\lambda{}^i \in \bigcup_{j=1}^{m} E(w_j - \{a', b'\})$ ist, existiert genau ein $\mu \in \{1,..., m\}$ mit $t_\lambda{}^i \in w_\mu$; wir setzen dann $f_\lambda{}^i := \mu$. (2) Im Falle $t_\lambda{}^i = a'$ sei $g_\lambda{}^i := a'$. Wenn $t_\lambda{}^i \in \bigcup_{j=1}^{m} E(w_j - \{a', b'\})$ ist, etwa $t_\lambda{}^i \in w_\mu$, existiert genau ein $\nu \in \{1,..., m(\lambda, \mu)\}$ mit $t_\lambda{}^i = z^\nu_{\lambda,\mu}$; wir setzen dann $g_\lambda{}^i := \nu$. (3) Betrachten wir zunächst den Fall $t_\lambda{}^i = a'$ und sei etwa $[a', a_\mu] \in K(w_\mu)$ für $\mu = 1,..., m$. Dann sei $h_\lambda{}^i = (e^1_{\lambda,i},..., e^m_{\lambda,i})$, wobei $e^\mu_{\lambda,i} := +1$ im Falle $a_\mu \in C(b, G - [x'_\lambda, y'_\lambda] - T'_\lambda)$ sei, während wir im entgegengesetzten Fall $e^\mu_{\lambda,i} := -1$ definieren. Sei nun $t_\lambda{}^i \in \bigcup_{\mu=1}^{m} E(w_\mu - \{a', b'\})$, etwa $t_\lambda{}^i \in w_\mu$. Wenn $g_\lambda{}^i = m(\lambda, \mu)$ ist, sei $h_\lambda{}^i := -1$. Wenn $\nu := g_\lambda{}^i < m(\lambda, \mu)$ ist, sei $h_\lambda{}^i := +1$ im Falle $w_\mu[z^\nu_{\lambda,\mu}, z^{\nu+1}_{\lambda,\mu}] \cap C(b, G - [x'_\lambda, y'_\lambda] - T'_\lambda) \neq \varnothing$ und sonst $h_\lambda{}^i := -1$. Damit haben wir $F_\lambda{}^i$ für alle λ, i mit $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ und $1 \leqslant i \leqslant n$ eindeutig definiert und setzen nun $F(\lambda) := (F_\lambda{}^1,..., F_\lambda{}^n)$.

Überlegen wir uns, wieviel verschiedene Tripel $F_\lambda{}^i$ auftreten können. Nehmen wir zunächst $a' \notin \bigcup_{\lambda=0}^{\lambda_0} T'_\lambda$ an. Dann treten außer $(0, 0, -1)$ nur Tripel $(\mu, \nu, \pm 1)$ auf mit $1 \leqslant \mu \leqslant m$ und $1 \leqslant \nu \leqslant n$. Da $(\mu, n, +1)$ nicht vorkommt, treten also höchstens $2mn$ verschiedenen Tripel auf. Sei nun $a' \in \bigcup_{\lambda=0}^{\lambda_0} T'_\lambda$, nach Definition von Π also $a' \in T'_\lambda$ für alle $\lambda = 0, 1,..., \lambda_0$. Sei etwa $a' \in W_1$. Betrachten wir die Tripel $(a', a', (e^1_{\lambda,1},..., e^m_{\lambda,1}))$. Da $T'_\lambda \leqslant_a T'_\kappa$ für $\lambda \leqslant \kappa$ gilt, ergibt sich leicht $e^\mu_{\lambda,1} \geqslant e^\mu_{\kappa,1}$ für $\lambda \leqslant \kappa$ und für $\mu = 1,..., m$. Somit kommen höchstens $m + 1$ verschiedene m-Tupel $(e^1_{\lambda,1},..., e^m_{\lambda,1})$ vor. Da für Tripel $(\mu, \nu, \pm 1)$ jetzt $\nu \leqslant n - 1$ gilt, treten hiervon nach obiger Betrachtung[5] höchstens $2m(n-1)$, also insgesamt wiederum höchstens $2mn$ Tripel auf.

[5] Im Falle $n = 1$ kommt $(0, 0, -1)$ nicht vor.

Somit treten höchstens $(2mn)^n$ verschiedene n-Tupel $F(\lambda)$ auf. Wegen $\lambda_0 + 1 > (2mn)^n$ gibt es also $\alpha < \beta$ in $\{0, 1, \ldots, \lambda_0\}$ mit $F(\alpha) = F(\beta)$. Seien $\tilde{C} := C(\bar{u}_{r'+\beta}, G - \{[x'_\alpha, y'_\alpha], [x'_\beta, y'_\beta]\} - (T'_\alpha \cup T'_\beta))$ und $J_{\lambda,\mu} := \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n \wedge f_\lambda^i = \mu\}$. Wegen $F(\alpha) = F(\beta)$ gilt $J_{\alpha,\mu} = J_{\beta,\mu}$ für alle $\mu = 1, \ldots, m$. Für $\mu \in \{1, \ldots, m\}$ mit $J_{\alpha,\mu} = \varnothing$ setzen wir $H_\mu := w_\mu$. Dann gilt $H_\mu \cap \tilde{C} = \varnothing$, insbesondere $[\bar{u}_{r'+\beta}, \bar{v}_{r'+\beta}] \notin K(H_\mu)$, nach Definition von Π und im Falle $a' \in T'_\alpha$, etwa $a' = t_\alpha{}^i$, wegen $e^\mu_{\alpha,i} = e^\mu_{\beta,i}$. Sei nun $\mu \in \{1, \ldots, m\}$ mit $J_{\alpha,\mu} \neq \varnothing$. Dann durchläuft $g_\alpha{}^i$ für $i \in J_{\alpha,\mu}$ die Zahlen $1, \ldots, |J_{\alpha,\mu}| =: m'$; sei etwa $g_\alpha^{i_\nu} = \nu$ für $i_\nu \in J_{\alpha,\mu}$ $(\nu = 1, \ldots, m')$. Wegen $F(\alpha) = F(\beta)$ ist auch $i_\nu \in J_{\beta,\mu}$ und $g_\beta^{i_\nu} = \nu$ für $\nu = 1, \ldots, m'$. Für $\nu = 1, \ldots, m' - 1$ sei $w_\mu{}^\nu := w_\mu[t_\beta^{i_\nu}, t_\beta^{i_{\nu+1}}]$ im Falle $h_\alpha^{i_\nu} = h_\beta^{i_\nu} = +1$ und $w_\mu{}^\nu := w_\mu[t_\alpha^{i_\nu}, t_\alpha^{i_{\nu+1}}]$ im Falle $h_\alpha^{i_\nu} = h_\beta^{i_\nu} = -1$. Nach Definition von i_ν, $i_{\nu+1}$ und $h_\lambda^{i_\nu}$ gilt $w_\mu{}^\nu \cap \tilde{C} = \varnothing$ für $\nu = 1, \ldots, m' - 1$. Sei a'' die erste bzw. b'' die letzte Ecke von $(T'_\alpha \cup T'_\beta) - \{a', b'\}$ auf w_μ in Richtung von a' nach b' und weiterhin seien $w_\mu{}^0 := w_\mu[a', a'']$ und $w_\mu^{m'} := w_\mu[b'', b']$. Nach Definition von Π und im Falle $a' \in T'_\alpha$, etwa $a' = t_\alpha{}^i$ $(= t_\beta{}^i)$, wegen $e^\mu_{\alpha,i} = e^\mu_{\beta,i}$ gilt $w_\mu{}^0 \cap \tilde{C} = \varnothing$. Ebenso gilt $w_\mu^{m'} \cap \tilde{C} = \varnothing$ nach Definition von Π und wegen $h_\alpha^{i_{m'}} = h_\beta^{i_{m'}}$ im Falle $b' \in T'_\alpha$. Sei nun $H_\mu := \bigcup_{\nu=0}^{m'} w_\mu{}^\nu \cup \bigcup_{\nu=1}^{m'} W_{i_\nu}[t_\alpha^{i_\nu}, t_\beta^{i_\nu}]$. Der Graph H_μ ist zusammenhängend, da $a'' \in \{t_\alpha^{i_1}, t_\beta^{i_1}\}$ und $b'' \in \{t_\alpha^{i_{m'}}, t_\beta^{i_{m'}}\}$ sind und da $W_{i_\nu}[t_\alpha^{i_\nu}, t_\beta^{i_\nu}]$ mit $W_{i_{\nu+1}}[t_\alpha^{i_{\nu+1}}, t_\beta^{i_{\nu+1}}]$ durch den Weg $w_\mu{}^\nu$ verbunden ist. Wegen $\bigcup_{\nu=0}^{m'} w_\mu{}^\nu \cap \tilde{C} = \varnothing$ ist $[\bar{u}_{r'+\beta}, \bar{v}_{r'+\beta}] \notin K(H_\mu)$.—Wegen des Zusammenhangs der H_i und wegen $E(H_i) \cap E(H_j) = \{a', b'\}$ für $1 \leqslant i < j \leqslant m$ gilt $\mu(a', b'; \bigcup_{j=1}^m H_j) \geqslant m$, was aber wegen $[\bar{u}_{r'+\beta}, \bar{v}_{r'+\beta}] \notin \bigcup_{j=1}^m H_j$ im Widerspruch steht zu $\mu(a', b'; G - [\bar{u}_{r'+\beta}, \bar{v}_{r'+\beta}]) < m$.

Aus der Ungleichung (U) des Beweises von Satz 1 wollen wir noch folgern, daß $g_n(m)$ bei festem n höchstens quadratisch mit m wächst. Zunächst wollen wir uns überlegen, daß es genügt, f an geeigneten $n \mid A \mid$ Stellen gleich n zu setzen, damit ein bez. A f-zusammenhängender Graph sogar schon n-zusammenhängend bez. A ist.

LEMMA 3. *Sei H ein n-fach zusammenhängender Graph und sei $f(x, y) := n$ für alle $[x, y] \in K(H)$, während $f(x, y) := 0$ für alle $(x, y) \in E(H) \times E(H)$ mit $[x, y] \notin K(H)$ sei. Jeder bez. $E(H)$ f-zusammenhängende Graph ist dann sogar n-zusammenhängend bez. $E(H)$. Insbesondere ist ein Graph genau dann f-minimal bez. $E(H)$, wenn er n-minimal bez. $E(H)$ ist.*

Beweis. Sei G f-zusammenhängend bez. $A := E(H)$ und nehmen wir $\mu(A, G) < n$ an. Dann gibt es eine A trennende Eckenmenge T in G mit $|T| < n$ (da wir A immer als unabhängig in G voraussetzen oder nach Aussage (a) der Einführung). Sei C eine Komponente von $G - T$ mit $C \cap A \neq \varnothing$ und sei $A' := A \cap E(C)$. Wegen $|T| < n$ ist $H - (A \cap T)$ zusammenhängend. Also gibt es eine Kante $[a, b] \in H - (A \cap T)$ mit $a \in A'$ und $b \notin A'$. Dann müßte aber $\mu(a, b; G) \geqslant f(a, b) = n$ sein, obwohl a und

$b \in A$ in verschiedenen Komponenten von $G - T$ liegen.—Die zweite Behauptung des Lemmas ergibt sich unmittelbar aus der ersten.

SATZ 1'. *Zu jedem n gibt es eine Konstante c_n, so daß für alle m gilt $g_n(m) \leqslant c_n m^2$.*

Beweis. Sei $m := |A| > n \geqslant 2$. Dann gibt es einen n-fach zusammenhängenden Graphen H mit $E(H) = A$ und $|K(H)| \leqslant n|A|$. Sei f die in Lemma 3 definierte Funktion und sei $f'(x, y) := \max\{0, f(x, y) - 1\}$ für alle $(x, y) \in A \times A$. Durch höchstens (nm)-fache Anwendung der Ungleichung (U) aus dem Beweis von Satz 1 erhalten wir

$$\begin{aligned} g_f(m) &\leqslant g_{f'}(m) + (nm)\, 5n 2^{n+1}(n-1)^{n-1}(n\, m\, n^{n-1}) \\ &\leqslant g_{f'}(m) + 2^{n+3} n^{2n+1} m^2. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3 gilt aber $g_f(m) = g_n(m)$ und $g_{f'}(m) = g_{n-1}(m)$. Unter Beachtung von $g_1(m) = m - 2$ ergibt sich durch $(n-1)$-fache Anwendung obiger Ungleichung also $g_n(m) \leqslant 2^{n+3} n^{2n+2} m^2$.

Die von mir betrachteten bez. A n-minimalem Graphen G zeigten allerdings nur ein lineares Wachstum von $e_{\geqslant 3}(G)$ mit $|A|$. Andererseits läßt sich aber anhand von Beispielen zeigen, daß $g_n(m)$ bei festem $m \geqslant 3$ mindestens quadratisch mit n wächst.

2. ÜBER DIE GRADE DER ECKEN EINES BEZ. A n-MINIMALEN GRAPHEN.

In diesem Paragraphen wollen wir den "Maximalgrad" und "Minimalgrad" eines bez. einer Eckenmenge n-minimalen Graphen untersuchen. Sei G bez. A n-minimal. Es erweist sich folgende Fallunterscheidung als natürlich.

(1) *Sei $|A| > n$.* Dann gibt es mindestens $n + 1$ Ecken $a \in A$ mit $\gamma(a, G) = n$. Es ist sogar $e_n(A, G) \geqslant \max_{a \in A} \gamma(a, G)$. Für $A = E(G)$ ergibt sich hieraus Satz 4 aus [8]. Weiterhin gilt $\gamma(x, G) \leqslant |A|$ für alle $x \in E(G)$ und für $a \in A$ sogar $\gamma(a, G) \leqslant |A| - 1$.

(2) *Sei $|A| \leqslant n$.* Dann braucht im Fall $|A| \geqslant 3$ kein $a \in A$ mit $\gamma(a, G) = n$ zu existieren. Für alle $a \in A$ gilt aber $\gamma(a, G) \leqslant (|A| - 1) \times (n + 2 - |A|)$ und diese Abschätzung ist bestmöglich. Für alle $x \in G - A$ ist $\gamma(x, G) \leqslant |A|(|A| - 1)$ und zumindest für $n \geqslant |A|(|A| - 1)$ können wirklich Ecken $x \in G - A$ mit $\gamma(x, G) = |A|(|A| - 1)$ auftreten.

Zunächst zwei Lemmata, ein einfaches und ein wesentliches.

LEMMA 4. *Sei T eine a und b trennende Eckenmenge mit $|T| = \mu(a, b; G) =: n$ und sei $[x, y] \in K(G)$ mit $\{x, y\} \cap C(a, G - T) \neq \varnothing$ und*

$\mu(a, b; G - [x, y]) < n$. Dann gilt auch $\mu(a, z; G - [x, y]) < n$ für alle $z \in G - (E(C(a, G - T)) \cup T)$.

Beweis. Nehmen wir an, es existiere ein $z \in G - (E(C(a, G - T)) \cup T)$ mit $\mu(a, z; G - [x, y]) \geqslant n$. Dann gibt es n kreuzungsfreie a, z-Wege $W_1, \ldots, W_n$ in $G - [x, y]$ und nach Voraussetzung n kreuzungsfreie a, b-Wege $W'_1, \ldots, W'_n$ in G. Aus den "Wegstücken von $W_1, \ldots, W_n$ zwischen a und T" und den "Wegstücken von $W'_1, \ldots, W'_n$ zwischen T und b" lassen sich wegen $\{x, y\} \cap C(a, G - T) \neq \varnothing$ dann n kreuzungsfreie a, b-Wege in $G - [x, y]$ kombinieren, im Widerspruch zu $\mu(a, b; G - [x, y]) < n$.

Sei $\mu(A, G) = n$. Für $a \in A$ und $x \in N(a, G)$ setzen wir $A_x(a) := \{a' \in A \mid \mu(a, a'; G - [a, x]) < n\}$ und für $M \subseteq N(a, G)$ sei $A_M(a) := \bigcap_{x \in M} A_x(a)$. Wenn für die Kante $[a, x] \in G$ gilt $\mu(A, G - [a, x]) < n$, existieren $a_1 \neq a_2$ in A, die sich durch eine Eckenmenge T mit $|T| < n$ in $G - [a, x]$ trennen lassen. Wegen $\mu(a_1, a_2; G) \geqslant n$ ist $\{a, x\} \cap C(a_i, G - [a, x] - T) \neq \varnothing$ für $i = 1, 2$. Also ist $a_1 \in A_x(a)$ oder $a_2 \in A_x(a)$, insbesondere $A_x(a) \neq \varnothing$.

LEMMA 5. *Sei $\mu(A, G) \geqslant n$ und $|A| \geqslant n + 1$. Sei $a \in A$ und für alle $z \in N(a, G)$ gelte $\mu(A, G - [a, z]) < n$. Wenn es $x \neq y$ in $N(a, G)$ mit $A_x(a) \cap A_y(a) \neq \varnothing$ gibt, dann ist $\gamma(a, G) = n$.*

Beweis. Seien $x \neq y$ zwei Ecken aus $N(a, G)$ mit $A_x(a) \cap A_y(a) \neq \varnothing$. Sei M maximal (bez. $\subseteq$) unter allen M' mit $\{x, y\} \subseteq M' \subseteq N(a, G)$ und mit $A_{M'}(a) \neq \varnothing$. Sei etwa $b \in A_M(a)$. Nach Lemma 2 existiert eine a und b in $\bar{G} := G - \{[a, z] \mid z \in M\}$ trennende Eckenmenge T mit $|T| = n - |M|$. Sei $C_u := E(C(u; \bar{G} - T))$ für $u = a, b$. Wegen $\mu(A, G) \geqslant n$ ist $M \subseteq C_b$ und für jede Komponente C von $\bar{G} - T$ mit $E(C) \neq C_a, C_b$ gilt $C \cap A = \varnothing$. Es ist $C_a \cap A = \{a\}$, da sonst $T' := T \cup \{a\}$ eine A trennende Eckenmenge mit $|T'| = n - |M| + 1 \leqslant n - 1$ wäre, im Widerspruch zu $\mu(A, G) \geqslant n$. Sei $z \in N(a, G) - M$. Da $A \cap C_b \subseteq A_M(a)$ ist, gilt $A_z(a) \cap C_b = \varnothing$ wegen der Maximaleigenschaft von M, also $A_z(a) \subseteq T$ wegen $A \cap C_a = \{a\}$.

Führen wir nun die Annahme $\gamma(a, G) > n$ zum Widerspruch. Dann ist $|N(a, G) - M| > |T|$. Nach obigem existieren also $x' \neq y'$ in $N(a, G) - M$ mit $A_{x'}(a) \cap A_{y'}(a) \neq \varnothing$. Sei $M' := \{x', y'\}$ und etwa $b' \in A_{M'}(a) \subseteq T$. Nach Lemma 2 gibt es eine a und b' in $G - \{[a, z] \mid z \in M'\}$ trennende Eckenmenge T' mit $|T'| = n - 2$. Sei $C'_u := E(C(u, G - \{[a, z] \mid z \in M'\} - T'))$ für $u = a, b'$. Wie oben gilt $A \cap C'_a = \{a\}$. Die Eckenmenge $S := (T' \cap C_a) \cup (T \cap T') \cup (T \cap C'_a)$ trennt a und b in $G - \{[a, z] \mid z \in M \cup M'\}$. Wegen $b \notin \bigcap_{z \in M \cup M'} A_z(a) = \varnothing$ gilt $|S| > n - |M| - 2$. Für $S' := (T' \cap C_b) \cup (T \cap T') \cup (T \cap C'_{b'})$ folgt somit $|S'| \leqslant |T| + |T'| - |S| < n$. Da also S' nicht A in G trennt, ergibt sich $A \cap C_b \cap C'_{b'} = \varnothing$ wegen $N(a, G) \cap C_b \cap C'_{b'} = \varnothing$. Da nach obigem $A \cap (C_a \cup C'_a) = \{a\}$ ist, gilt also $A - \{a\} \subseteq (C_b \cup T) \cap (C'_{b'} \cup T') - (C_b \cap C'_{b'}) = S'$, was den Widerspruch $n \leqslant |A| - 1 \leqslant |S'| < n$ liefert.

KOROLLAR 1. *Sei G n-minimal bez. A mit $|A| \geqslant n+1$. Wenn $\gamma(a, G) > n$ ist, dann ist $A_x(a) \cap A_y(a) = \varnothing$ für alle $x \neq y$ aus $N(a, G)$.*

KOROLLAR 2. *Sei G n-minimal bez. A mit $|A| \geqslant n+1$. Dann gilt $\gamma(a, G) \leqslant |A| - 1$ für alle $a \in A$.*

SATZ 2. *Sei G n-minimal bez. A mit $|A| \geqslant n+1$. Sei $[x, y] \in K(G)$ und sei T eine die Ecken $a \in A$ und $b \in A$ in $G - [x, y]$ trennende Eckenmenge mit $|T| = n-1$. Dann existiert ein $b' \in A \cap C(b, G - [x, y] - T)$ mit $\gamma(b', G) = n$.*

Beweis. Wir können $\gamma(b, G) > n$ voraussetzen. Sei $C_u := E(C(u, G - [x, y] - T))$ für $u = a, b$. Wenn $A_z(b) \cap C_a \neq \varnothing$ für ein $z \in N(b, G)$ ist, dann gilt $A \cap C_a \subseteq A_z(b)$ nach Lemma 4. (Man unterteile etwa $[x, y]$ durch eine Ecke u und betrachte die trennende Eckenmenge $T' := T \cup \{u\}$.) Nach Kor. 1 zu Lemma 5 ist also $A_z(b) \cap C_a \neq \varnothing$ für höchstens ein $z \in N(b, G)$. Für alle $z \in N(b, G)$ bis auf höchstens eine Ausnahme gilt somit $A_z(b) \subseteq C_b \cup T$. Nach Kor. 1 zu Lemma 5 existiert wegen $\gamma(b, G) > |T| + 1$ also ein $z_0 \in N(b, G)$ mit $A_{z_0}(b) \subseteq C_b$. Sei $b_1 \in A_{z_0}(b)$. Dann existiert eine b und b_1 in $G - [b, z_0]$ trennende Eckenmenge T_0 mit $|T_0| = n-1$. Für z_0, b_1 und T_0 gilt aber $A \cap C(b_1, G - [b, z_0] - T_0) \subseteq A_{z_0}(b) \subseteq C_b - \{b\}$. Wenn $\gamma(b_1, G) > n$ ist, können wir obigen Schritt auf b_1, $[b, z_0]$, T_0 statt auf b, $[x, y]$, T anwenden und kommen so etwa zu $z_1 \in N(b_1, G)$, $b_2 \in A_{z_1}(b_1)$ und T_1 mit $A \cap C(b_2, G - [b_1, z_1] - T_1) \subseteq A \cap C(b_1, G - [b, z_0] - T_0) - \{b_1\} \subseteq C_b - \{b, b_1\}$. Da der Graph G endlich ist, muß dieses Verfahren abbrechen und uns eine Ecke $b' \in C_b$ mit $\gamma(b', G) = n$ liefern.

Indem wir Satz 2 auf eine Kante $[a, x] \in K(G)$ und ein $b \in A_x(a) \neq \varnothing$ anwenden, erhalten wir

KOROLLAR 1. *Sei G n-minimal bez. A mit $|A| \geqslant n+1$ und sei $a \in A$ mit $\gamma(a, G) > n$. Dann ist $e_n(A_x(a), G) > 0$ für alle $x \in N(a, G)$.*

Wenn wir in Korollar 1 die Ecke $a \in A$ mit $\gamma(a, G) = \max_{x \in A} \gamma(x, G)$ wählen, erhalten wir mit Kor. 1 zu Lemma 5 das

KOROLLAR 2. *Sei G n-minimal bez. A mit $|A| \geqslant n+1$. Dann gilt $e_n(A, G) \geqslant \max_{x \in A} \gamma(x, G)$.*

KOROLLAR 3. *Sei G n-minimal bez. A mit $|A| \geqslant n+1$. Dann gilt $e_n(A, G) \geqslant n+1$.*

KOROLLAR 4. *Sei $T \subseteq E(G)$ mit $|T| \leqslant n$ und sei C eine Komponente von $G - T$ mit $C \cap A \neq \varnothing$. Dann existiert ein $a' \in A \cap C$ mit $\gamma(a', G) = n$.*

Beweis. Sei $a \in A \cap C$ und nehmen wir $\gamma(a, G) > n$ an. Wenn $A_x(a) \subseteq$

$E(C) \cup T$ für alle $x \in N(a, G)$ gilt, existiert wegen Kor. 1 zu Lemma 5 ein $y \in N(a, G)$ mit $A_y(a) \subseteq C$, also nach obigem Korollar 1 ein $a' \in A_y(a) \subseteq C$ mit $\gamma(a', G) = n$. Wir können also annehmen, daß ein $z \in N(a, G)$ mit $A_z(a) \nsubseteq E(C) \cup T$ existiert. Sei etwa $b \in A_z(a) \cap (G - (E(C) \cup T))$. Dann gibt es eine a und b in $G - [a, z]$ trennende Eckenmenge T' mit $|T'| = n - 1$. Es ist $z \in C_b := C(b, G - [a, z] - T')$, also $C_b \cap T \neq \varnothing$. Nach Lemma 4 und Kor. 1 zu Lemma 5 gilt $A_x(a) \subseteq (E(C) \cup T) - E(C_b)$ für alle $x \in N(a, G) - \{z\}$. Also existiert nach Kor. 1 zu Lemma 5 wieder ein $y \in N(a, G)$ mit $A_y(a) \subseteq C$, woraus nach Korollar 1 die Behauptung folgt.

Wenden wir uns nun dem Fall $n \geqslant |A| =: m$ zu. Der Graph G entstehe aus dem vollständigen Graphen K_m mit m Ecken, indem wir jede Kante $[x, y]$ von K_m jeweils "durch $n - m + 2$ kreuzungsfreie x, y-Wege ersetzen". Dann ist $E(K_m)$ n-minimal in G und für alle $a \in E(K_m)$ gilt $\gamma(a, G) = (m - 1)(n - m + 2)$, also $\gamma(a, G) > n$ im Falle $m \geqslant 3$. Dieses Beispiel zeigt, daß die im folgenden Satz gegebene Abschätzung bestmöglich ist.

Satz 3. *Sei G n-minimal bez. A mit $m := |A| \leqslant n$. Dann gilt $n \leqslant \gamma(a, G) \leqslant (m - 1)(n + 2 - m)$ für alle $a \in A$. Wenn $\gamma(a, G) = (m - 1) \times (n + 2 - m)$ für ein $a \in A$ ist, dann existiert zu jedem $b \in A - \{a\}$ ein System von $n + 2 - m$ kreuzungsfreien a, b-Wegen $W_1, \ldots, W_{n+2-m}$ in G mit $\gamma(x,G) = 2$ für alle $x \in \bigcup_{i=1}^{n+2-m} E(W_i) - \{a, b\}$.*

Beweis. Sei $a \in A$ und sei $\mathfrak{M} := \{M \subseteq N(a, G) \mid A_M(a) \neq \varnothing \wedge \bigwedge_{M \subset M' \subseteq N(a,G)} A_{M'}(a) = \varnothing\}$. Wegen $A_x(a) \neq \varnothing$ für alle $x \in N(a, G)$ gilt $N(a, G) = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M$. Nach Definition von $\mathfrak{M}$ ist $A_M(a) \cap A_{M'}(a) = \varnothing$ für alle $M \neq M'$ aus $\mathfrak{M}$. Somit gilt

$$\sum_{M \in \mathfrak{M}} |A_M(a)| \leqslant m - 1. \tag{1}$$

Sei $M \in \mathfrak{M}$ mit $|M| > n + 1 - m \geqslant 1$ und sei $b \in A_M(a)$. Nach Lemma 2 existiert eine a und b in $G' := G - \{[a, x] \mid x \in M\}$ trennende Eckenmenge T mit $|T| = n - |M|$. Wegen $|T| \leqslant n - 2$ ist $A \cap E(C(a, G' - T)) = \{a\}$. Da für jede Komponente $C \neq C(a, G' - T)$, $C(b, G' - T)$ gilt $A \cap C = \varnothing$, folgt somit $|A \cap C(b, G' - T)| \geqslant m - 1 - |T| = |M| - (n + 1 - m)$, also $|A_M(a)| \geqslant |M| - (n + 1 - m)$. Seien $\mathfrak{M}_1 := \{M \in \mathfrak{M} \mid |M| \leqslant n + 1 - m\}$, $\mathfrak{M}_2 := \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1$ und $s_i := |\mathfrak{M}_i|$ für $i = 1, 2$. Aus (1) ergibt sich mit der letzten Ungleichung

$$s_1 + \sum_{M \in \mathfrak{M}_2} (|M| - (n + 1 - m)) \leqslant m - 1. \tag{2}$$

Andererseits gilt

$$\gamma(a, G) \leqslant \sum_{M \in \mathfrak{M}} |M| \leqslant s_1(n + 1 - m) + \sum_{M \in \mathfrak{M}_2} |M|. \tag{3}$$

Da $s_1 + s_2 \leqslant m - 1$ nach (1) gilt, folgt mit (2) hieraus

$$\begin{aligned} \gamma(a, G) &\leqslant s_1(n + 1 - m) + s_2(n + 1 - m) + m - 1 - s_1 \\ &\leqslant (m - 1)(n + 2 - m). \end{aligned} \tag{4}$$

Nehmen wir nun $\gamma(a, G) = (m - 1)(n + 2 - m)$ an. Nach (4) sind dann $s_1 = 0$ und $s_2 = m - 1$ und nach (2) gilt somit $| M | = n + 2 - m$ für alle $M \in \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$. Wegen $| \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M | = \gamma(a, G) = \sum_{M \in \mathfrak{M}} | M |$ gilt $M \cap M' = \varnothing$ für alle $M \neq M'$ aus $\mathfrak{M}$. Aus (1) ergibt sich $| A_M(a) | = 1$, etwa $A_M(a) = \{a_M\}$, für alle $M \in \mathfrak{M}$ und wegen der Disjunktheit der $A_M(a)$ weiter $A - \{a\} = \{a_M \mid M \in \mathfrak{M}\}$. Nach Lemma 2 gibt es eine a und a_M in $G - \{[a, x] \mid x \in M\}$ trennende Eckenmenge T_M mit $| T_M | = n - | M | = m - 2 \leqslant n - 2$. Also ist $A \cap C(a, G - \{[a, x] \mid x \in M\} - T_M) = \{a\}$ und wegen $A_M(a) = \{a_M\}$ somit $T_M = A - \{a, a_M\}$. Also enthält jeder a, a_M-Weg eine Ecke aus $A - \{a, a_M\}$ oder eine der Kanten $[a, x]$ mit $x \in M$. Seien $W_1, \ldots, W_n$ kreuzungsfreie a, a_M-Wege, wobei etwa $W_i \cap M \neq \varnothing$ für $i = 1, \ldots, n + 2 - m$ sei. Sei C eine Komponente von $G - \{a, a_M\}$ mit $A \cap C \neq \varnothing$. Dann ist $C \cap \bigcup_{i=1}^{n+2-m} W_i = \varnothing$, da sonst für ein geeignetes $a_{M'} \in A \cap C$ mit $M' \in \mathfrak{M} - \{M\}$ ein a, $a_{M'}$-Weg W existierte, für welchen $(W - \{a, a_{M'}\}) \cap A = \varnothing$ und wegen $M \cap M' = \varnothing$ auch $K(W) \cap \{[a, x] \mid x \in M'\} = \varnothing$ ist, was obigem widerspricht. Dann kann aber kein $[x, y] \in K(G) - \bigcup_{i=1}^{n+2-m} K(W_i)$ mit $\{x, y\} \cap \bigcup_{i=1}^{n+2-m} E(W_i - \{a, a_M\}) \neq \varnothing$ existieren, da sonst ersichtlich auch $\mu(A, G - [x, y]) \geqslant n$ wäre.

Ein in G n-minimales A mit $| A | \leqslant n$ braucht auch dann keine Ecke vom Grad n zu enthalten, wenn man "parallele Wege" ausschließt, wie der folgende Graph (für $m \geqslant 6$) zeigt. Sei A eine endliche Menge mit $m := | A | \geqslant 5$. Dann ist $G := (A \cup A^3, \{[a, \{a, x, y\}] \mid a \in A \wedge \{a, x, y\} \in A^3\})$ ein $(2m - 4)$-minimaler Graph bez. A, aber für alle $a \in A$ gilt $\gamma(a, G) = \binom{m-1}{2}$.

In einem bez. A f-zusammenhängenden Graphen G gilt $\gamma(a, G) \geqslant \max_{x \in A} f(a, x)$ für alle $a \in A$. Wenn nun G sogar f-minimal bez. A ist, gibt es dann ein $a \in A$ mit $\gamma(a, G) = \max_{x \in A} f(a, x)$? Dies ist im allgemeinen nicht der Fall, wie man aus dem Graphen ersieht, den man aus einem Kreis C erhält, indem man für jedes $[x, y] \in K(C)$ "die Kante $[x, y]$ durch n kreuzungsfreie x, y-Wege ersetzt". (Hierbei sei $A := E(C)$, $f(x, y) := n + 1$ im Falle $[x, y] \in K(C)$ und sonst $f(x, y) := 0$.) Man kann auch bez. A f-minimale Graphen G ohne Ecken vom Grad $\leqslant 2$ finden, die kein $a \in A$ mit $\gamma(a, G) = \max_{x \in A} f(a, x)$ enthalten. Anders verhält es sich aber im Falle des Kantenzusammenhangs. Hierbei ist es praktisch, Multigraphen zu betrachten, also auch mehrfache Kanten zuzulassen. Sei $\lambda(x, y; G)$ die Maximalzahl kantendisjunkter x, y-Wege in G. Die Begriffe "f-kantenzusammenhängend bez. A" und "minimal f-kantenzusammenhängend bez. A" seien für Multigraphen so definiert, wie man es nach den eingangs definierten Begriffen "f-zusammenhängend bez. A" und "f-minimal bez. A" erwartet. Sei K eine die Ecken a und b im Multigraphen G trennende Kantenmenge mit $|K| = \lambda(a, b; G) =: n$ und sei $C := C(a, G - K)$. Sei etwa $K = \{k_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ und sei k_i eine Kante $[x_i, y_i]$[6] mit $x_i \in C$ für $i = 1,..., n$. Dann definieren wir $G' := (E(G) - E(C - a), K(G - E(C)) \cup \{[a, y_i] \mid i = 1,..., n\})$, wobei eine Kante $[a, y]$ so oft in G' vorkommen möge, wie y in der Folge $y_1, y_2,..., y_n$ vorkommt. Wir sagen, G' entstehe aus G durch *Identifizieren von C zu a*. Es gilt nun

LEMMA 6. *Sei K eine die Ecken a_1 und a_2 im Multigraphen G trennende Kantenmenge mit $|K| = \lambda(a_1, a_2; G)$ und G' entstehe aus G durch Identifizieren von $C(a_1, G - K)$ zu a_1. Dann gilt $\lambda(x, y; G') = \lambda(x, y; G)$ für alle $x \neq y$ aus $E(G')$.*

Lemma 6 ergibt sich aus Kap. IV, Lemma 3.1 von [5], wenn man noch $\lambda(a_1, x; G') = \lambda(a_1, x; G)$ für alle $x \in G' - a_1$ beachtet.

Aus dem Mengerschen Satz in Kantenform (siehe Satz 9.3 in [13]) folgt leicht

LEMMA 7. $\lambda(a, b; G) \geqslant m \wedge \lambda(b, c; G) \geqslant m \to \lambda(a, c; G) \geqslant m.$

SATZ 4. *Sei G minimal f-kantenzusammenhängend bez. A. Dann existieren zwei Ecken $a \in A$ mit $\gamma(a, G) = \max_{x \in A} f(a, x)$.*

Beweis. Wir induzieren über die Eckenzahl des Multigraphen. Wir können G als zusammenhängend voraussetzen. Sei $k_0 \in K(G)$. Da G minimal f-kantenzusammenhängend bez. A ist, gibt es $a_1 \neq a_2$ in A mit $\lambda(a_1, a_2; G - k_0) < f(a_1, a_2) =: n$. Also existiert eine a_1 und a_2 in G trennende Kantenmenge K mit $|K| = n$ und $k_0 \in K$. Für $i = 1, 2$ seien $C_i := C(a_i, G - K)$, $A'_i := A \cap E(C_i)$ und $A_i := (A - A'_i) \cup \{a_i\}$. Der Graph G_i entstehe aus G durch Identifizieren von C_i zu a_i. Weiterhin sei $f_i(a, b) := f(a, b)$ für alle a, b aus $A_i - \{a_i\}$ und $f_i(a_i, a) := \max_{x \in A_i'} f(x, a)$ für alle $a \in A_i - \{a_i\}$. Überlegen wir uns zunächst

(Z) *Für $i = 1, 2$ ist G_i minimal f_i-kantenzusammenhängend bez. A_i.*

Betrachten wir etwa G_2. Da für alle $a \in A'_1$ und alle $a' \in A'_2$ gilt $\lambda(a, a_2; G_2) \geqslant \lambda(a, a'; G) \geqslant f(a, a')$, folgt $\lambda(a, a_2; G_2) \geqslant f_2(a, a_2)$ und nach Lemma 6 ist G_2 somit f_2-kantenzusammenhängend. Sei nun $k \in K(G_2)$. Führen wir die Annahme, daß A_2 f_2-kantenzusammenhängend in $G_2 - k$ ist, zum Widerspruch. Da dann $\lambda(a_1, a_2; G_2 - k) \geqslant f_2(a_1, a_2) \geqslant f(a_1, a_2) = n = \gamma(a_2, G_2)$ ist, gilt $k \in K(C_1)$. Da A minimal f-kantenzusammenhängend in G ist, gibt es $b_1 \neq b_2$ in A mit $\lambda(b_1, b_2; G - k) < f(b_1, b_2)$. Insbesondere

[6] In einem Multigraphen bezeichne $[x, y]$ irgendeine der Kanten zwischen x und y.

ist $\lambda(b_1, b_2; G) = f(b_1, b_2) =: m$. Wegen $\lambda(a_1, a_2; G_2 - k) = n = \lambda(a_1, a_2; G - k)$ ergibt sich aus Lemma 6 $\lambda(a, a'; G_2 - k) = \lambda(a, a'; G - k)$ für alle $a \neq a'$ aus A_2, also $\lambda(a, a'; G - k) \geqslant f_2(a, a') \geqslant f(a, a')$. Somit ist $\{b_1, b_2\} \cap (A_2' - \{a_2\}) \neq \varnothing$; sei etwa $b_2 \in A'_2 - \{a_2\}$. Wäre $b_1 \in A'_2$, erhielten wir mit Lemma 6 $\lambda(b_1, b_2; G - k) = \lambda(b_1, b_2; G_1) = \lambda(b_1, b_2; G) \geqslant f(b_1, b_2)$, im Widerspruch zur Wahl von b_1 und b_2. Also gilt $b_1 \in A'_1$. Nach Lemma 6 ist $\lambda(b_1, a_2; G) = \lambda(b_1, a_2; G_2) \geqslant f_2(b_1, a_2) \geqslant f(b_1, b_2) = m$. Aus Lemma 7 folgt also $\lambda(a_2, b_2; G) \geqslant m$ und mit Lemma 6 weiter $\lambda(a_2, b_2; G - k) \geqslant m$. Wegen $\lambda(b_1, a_2; G - k) = \lambda(b_1, a_2; G_2 - k) \geqslant f_2(b_1, a_2) \geqslant m$ ergibt sich mit Lemma 7 hieraus der Widerspruch $\lambda(b_1, b_2; G - k) \geqslant m = f(b_1, b_2)$.

Wenn wir die Kante k_0 so wählen können, daß $| C_1 | \geqslant 2$ und $| C_2 | \geqslant 2$ gilt, erhalten wir nach (Z) und nach Induktionsannahme ein $a'_1 \in C_2$ und ein $a'_2 \in C_1$ mit $\gamma(a'_i, G_i) = \max_{x \in A_i} f_i(a'_i, x)$, also $\gamma(a'_i, G) = \max_{x \in A} f(a'_i, x)$ für $i = 1, 2$. Wenn eine solche Wahl von k_0 nicht möglich ist, gilt für jede Kante $[x, y]$ von G: Es ist $x \in A$ und $\gamma(x, G) = \max_{z \in A} f(x, z)$ oder es ist $y \in A$ und $\gamma(y, G) = \max_{z \in A} f(y, z)$. Dann ergibt sich die Existenz zweier $a \in A$ mit $\gamma(a, G) = \max_{z \in A} f(a, z)$ aber unmittelbar.

Sei G ein bez. A n-minimaler Graph und sei $m := | A |$. In Satz 3 zeigten wir $\gamma(a, G) \leqslant (m - 1)(n + 2 - m)$ für alle $a \in A$ im Falle $m \leqslant n$ und nach Kor. 2 zu Lemma 5 gilt $\gamma(a, G) \leqslant m - 1$ für alle $a \in A$ im Falle $m > n$. Wir wollen nun untersuchen, wie groß der Grad in den Ecken $z \in E(G) - A$ sein kann. Sei $z \in G - A$ und seien $a \neq b$ aus A. Es kann höchstens zwei Kanten $[z, x] \in G$ mit $\mu(a, b; G - [z, x]) < n$ geben, da jede solche Kante von jedem System n kreuzungsfreier a, b-Wege benutzt wird. Da aber andererseits zu jedem $[z, x] \in G$ Ecken $a' \neq b'$ aus A mit $\mu(a', b'; G - [z, x]) < n$ existieren, ergibt sich $\gamma(z, G) \leqslant m(m - 1)$. Diese Abschätzung ist aber zumindest im Fall $n \geqslant m(m - 1)$ bestmöglich, wie der folgende Graph zeigt. Seien $m + 1$ disjunkte vollständige Graphen $V_0, V_1, \ldots, V_m$ gegeben mit $| V_0 | = m$ und $| V_i | = m - 1$ für $i = 1, \ldots, m$ und sei $z \notin \bigcup_{i=0}^{m} E(V_i)$. Seien etwa $E(V_0) = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und $E(V_i) = \{x_1^i, \ldots, x_{i-1}^i, x_{i+1}^i, \ldots, x_m^i\}$ für $i = 1, \ldots, m$. Es sei nun $G := (\bigcup_{i=0}^{m} E(V_i) \cup \{z\}, \bigcup_{i=0}^{m} K(V_i) \cup \{[z, x] \mid x \in \bigcup_{i=1}^{m} E(V_i)\} \cup \{[a_i, x_k^j] \mid i, j, k \in \{1, \ldots, m\} \wedge i \neq k \neq j\})$. Der Graph G ist $m(m - 1)$-minimal bez. $A := E(V_0)$ und es gilt $\gamma(z, G) = m(m - 1)$. Durch Hinzufügen weiterer Ecken y und aller Kanten $[y, a]$ mit $a \in A$ erhält man (wegen $\gamma(a, G) = m(m - 1)$ für $a \in A$) für jedes $n \geqslant m(m - 1)$ einen bez. A n-minimalen Graphen G' mit $\gamma(z, G') = m(m - 1)$.—Der vollständig paare Graph $K_{m,n}$ zeigt, daß in einem bez. A n-minimalen Graphen G bei beliebigen $m := | A |$ und $n \geqslant 1$ eine Ecke $z \in G - A$ mit $\gamma(z, G) = m$ auftreten kann. Im Falle $n \leqslant m$ ist dies aber auch der größtmögliche Grad einer Ecke $z \in E(G) - A$, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 5. *Sei G n-minimal bez. A mit $n \leqslant | A |$. Dann gilt $\gamma(z, G) \leqslant | A |$ für alle $z \in G - A$.*

Beweis. Sei $z \in G - A$. Für $x \in N(z, G)$ sei $A^x := \{a \in A \mid$ Es gibt ein $b \in A - \{a\}$ und eine a und b in $G - [z, x]$ trennende Eckenmenge T mit $|T| = n - 1$ und $z \in C(b, G - [z, x] - T)\}$ und für $M \subseteq N(z, G)$ sei $A^M := \bigcup_{x \in M} A^x$. Weiterhin sei $\mathfrak{M} := \{M \subseteq N(z, G) \mid$ Zu geeignetem $a \in A$ gibt es eine a und z in $G - \{[z, x] \mid x \in M\}$ trennende Eckenmenge T mit $|T| \leqslant n - |M|$ und $A \cap C(a, G - \{[z, x] \mid x \in M\} - T) \subseteq A^M\}$. Da A n-minimal in G ist, gilt $\{x\} \in \mathfrak{M}$ für jedes $x \in N(z, G)$. Sei nun M_0 ein maximales Element von $(\mathfrak{M}, \subseteq)$. Wenn $M_0 \subset N(z, G)$ ist, sei M_1 ein maximales Element von $\mathfrak{M}_1 := \{M \in \mathfrak{M} \mid M \subseteq N(z, G) - M_0\}$. Wenn $M_0 \cup M_1 \subset N(z, G)$ ist, sei M_2 ein maximales Element von $\mathfrak{M}_2 := \{M \in \mathfrak{M} \mid M \subseteq N(z, G) - (M_0 \cup M_1)\}$. Auf diese Weise definieren wir $\mathfrak{M}_0 := \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k$ und eine Partition $M_0, M_1, \ldots, M_k$ von $N(z, G)$. Nach Definition von $\mathfrak{M}$ gibt es für $i = 0, 1, \ldots, k$ ein $a_i \in A$ und eine a_i und z in $G_i := G - \{[z, x] \mid x \in M_i\}$ trennende Eckenmenge T_i mit $|T_i| \leqslant n - |M_i|$ und $A_i := A \cap E(C(a_i, G_i - T_i)) \subseteq A^{M_i}$. Überlegen wir uns zunächst

(1) $|A_i| \geqslant |M_i|$ *für alle* $i = 0, 1, \ldots, k$.

Wir können $|M_i| \geqslant 2$ annehmen. Dann gilt $A \cap C = \varnothing$ für jede Komponente $C \neq C(a_i, G_i - T_i)$ von $G_i - T_i$, da wegen $|T_i| \leqslant n - 2$ sonst $T'_i := T_i \cup \{z\}$ eine A trennende Eckenmenge mit $|T'_i| < n$ wäre. Also ist $A \subseteq C(a_i, G_i - T_i) \cup T_i$ und wegen $|A| \geqslant n$ somit $|A_i| \geqslant |A| - |T_i| \geqslant |A| - n + |M_i| \geqslant |M_i|$.

(2) *Es ist* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *für alle* $0 \leqslant i < j \leqslant k$.

Da $A_j \subseteq A^{M_j}$ nach Definition von $\mathfrak{M}$ gilt, genügt es, $A^x \cap A_i = \varnothing$ für alle $x \in N(z, G) - \bigcup_{\nu=0}^{i} M_\nu$ zu beweisen. Führen wir die Annahme, daß ein $x \in N(z, G) - \bigcup_{\nu=0}^{i} M_\nu$ mit $A^x \cap A_i \neq \varnothing$ existiert, zum Widerspruch. Sei etwa $a \in A^x \cap A_i$. Nach Definition von A^x existieren ein $b \in A - \{a\}$ und eine a und b in $G - [z, x]$ trennende Eckenmenge T mit $|T| = n - 1$ und $z \in C(b, G - [z, x] - T)$. Sei $C_y := E(C(y, G - [z, x] - T))$ für $y = a, z$ und $C'_y := E(C(y, G_i - T_i))$ für $y = a, z$. Sei $T' := (T_i \cap C_a) \cup (T_i \cap T) \cup (T \cap C'_a)$. Da T' die Ecken a und b in G trennt, gilt $|T'| \geqslant n$, also $|T \cap C'_z| < |T_i \cap C_a|$ wegen $|T| < n$. Für $T'' := (T \cap C'_z) \cup (T \cap T_i) \cup (T_i \cap C_z)$ gilt daher $|T''| < |T_i \cap C_a| + |T \cap T_i| + |T_i \cap C_z| = |T_i| \leqslant n - |M_i|$. Sei $M'_i := M_i \cup \{x\}$. Dann ist T'' eine z' und a in $G - \{[z, y] \mid y \in M'_i\}$ trennende Eckenmenge mit $|T''| \leqslant n - |M'_i|$ für jedes $z' \in C_z \cap C'_z$, insbesondere für $z' = z$. Sei $C := C(a, G - \{[z, y] \mid y \in M'_i\} - T'')$ und sei $a' \in A \cap C$. Wegen $A \subseteq (C_z \cup T \cup C_a) \cap (C'_z \cup T_i \cup C'_a)$ und wegen $C \cap C_z \cap C'_z = \varnothing$ gilt $a' \in C_a \cup C'_a$. Wegen $A \cap C_a \subseteq A^x$ ist somit $a' \in A^x \cup A_i \subseteq A^{M'_i}$. Also folgt $A \cap C \subseteq A^{M'_i}$ und damit $M'_i \in \mathfrak{M}_i$, im Widerspruch dazu, daß M_i maximal in $(\mathfrak{M}_i, \subseteq)$ war.

Aus (1) und (2) ergibt sich nun unmittelbar die Behauptung $\gamma(z, G) = \sum_{i=0}^{k} |M_i| \leqslant \sum_{i=0}^{k} |A_i| = |\bigcup_{i=0}^{k} A_i| \leqslant |A|$.

Bemerkung 1. Man beachte, daß im obigen Beweis lediglich an einer Stelle die Voraussetzung $n \leqslant |A|$ benutzt wurde, nämlich in der letzten Ungleichung des Beweises von (1). Wenn man $|A| < n$ zuläßt, ergibt sich statt (1) nur noch $|A_i| \geqslant \max\{1, |M_i| + |A| - n\}$. Im Falle $|A| = n - 1$ folgt aus der letzten Ungleichung des obigen Beweises somit $\gamma(z, G) \leqslant \sum_{i=0}^{k} (|A_i| + 1) \leqslant \sum_{i=0}^{k} 2|A_i| \leqslant 2|A|$. Diese Ungleichung läßt sich durch genauere Analyse zu $\gamma(z, G) \leqslant 2|A| - 2$ verschärfen. Andererseits kann man zu jedem $n \geqslant 3$ einen Graphen G finden, der n-minimal bez. A mit $|A| = n - 1$ ist und der eine Ecke $z \in G - A$ mit $\gamma(z, G) = 2|A| - 2$ enthält.

Bemerkung 2. Sei G n-minimal bez. A mit $m := |A| > n$ und sei $z \in G - A$ mit $\gamma(z, G) = m$. Man könnte vermuten, daß der von $E(C(z, G - A)) \cup A$ aufgespannte (induzierte) Untergraph von G dann aus m "bis auf z disjunkten Wegen zwischen z und A" besteht. Es ist zwar richtig, daß dann m bis auf z disjunkte Wege zwischen z und A in G existieren, aber es kann durchaus Ecken $x \notin A \cup \{z\}$ mit $\gamma(x, G) \geqslant 3$ auf diesen Wegen geben, wie der folgende 5-minimale Graph zeigt. Seien C und C' zwei disjunkte Kreise. Die Ecken von C in zyklischer Reihenfolge seien $a_1, \ldots, a_m$, die von C' in zyklischer Reihenfolge $b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots, b_m, c_m$. Der Graph G' entstehe aus $C \cup C'$ durch Hinzufügen der Kanten $\{[a_i, c_i] \mid i = 1, \ldots, m\} \cup \{[a_i, b_j] \mid i \in \{1, \ldots, m\} \wedge (j = i \vee j = i + 1)\}$, wobei die Indizes modulo m zu betrachten sind. Mit $z \notin E(G')$ sei $G := (E(G') \cup \{z\}, K(G') \cup \{[z, c_i] \mid i = 1, \ldots, m\})$. Der Graph G ist 5-minimal bez. $A := E(C)$ und es ist $\gamma(z, G) = |A|$.

Die Frage nach dem Maximalgrad der Multigraphen G, die minimal n-kantenzusammenhängend bez. A sind, läßt sich mit Hilfe von (Z) aus dem Beweis von Satz 4 leicht durch Induktion beantworten: *Es ist* $\gamma(z, G) \leqslant n|A|$ *für alle* $z \in G - A$, *und zwar ist diese Ungleichung bestmöglich. Für* $a \in A$ *gilt* $\gamma(a, G) \leqslant n(|A| - 1)$, *was wiederum bestmöglich ist.*

Literatur

1. G. A. Dirac, In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen, *Math. Nachr.* **22** (1960), 61–85.
2. G. A. Dirac, Généralisations du théorème de Menger, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* **250** (1960), 4252–4253.
3. G. A. Dirac, Minimally 2-connected graphs, *J. Reine Angew. Math.* **228**, (1967), 204–216.
4. F. Escalante, Schnittverbände in Graphen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **38** (1972), 199–220.
5. L. R. Ford und D. R. Fulkerson, "Flows in Networks," Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1962.
6. R. Halin, A theorem on n-connected graphs, *J. Combinatorial Theory* **7** (1969), 150–154.

7. F. HARARY, "Graphentheorie," Oldenbourg, Munich, 1974.
8. W. MADER, Ecken vom Grad n in minimalen n-fach zusammenhängenden Graphen, *Arch. Math. (Basel)* **23** (1972), 219–224.
9. W. MADER, Zur Struktur minimal n-fach zusammenhängender Graphen, Erscheint in den Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg.
10. O. ORE, "The Four-Color Problem," Academic Press, New York, 1967.
11. M. D. PLUMMER, On minimal blocks, *Trans. Amer. Math. Soc.* **134** (1968), 85–94.
12. W. T. TUTTE, A theorem on planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956), 99–116.
13. K. WAGNER, "Graphentheorie," B. I. Hochschultaschenbuch, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970.
14. M. E. WATKINS UND D. M. MESNER, Cycles and connectivity in graphs, *Canad. J. Math.* **19** (1967), 1319–1328.
15. H. WHITNEY, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.* **54** (1932), 150–168.